2. Operaciones aritméticas

Recordemos

Desde que el hombre empezó a utilizar los números para cuantificar todo lo relacionado con agricultura, población y demás aspectos relacionados con los números, también empezó a realizar operaciones como añadir y quitar unidades a un conjunto determinado.

A partir de esto surgió la aritmética, la cual es la rama de las matemáticas que relaciona los números y las diferentes operaciones que se pueden realizar con los números (Suma, resta, multiplicación y división) así mismo las propiedades implícitas en dichas operaciones.



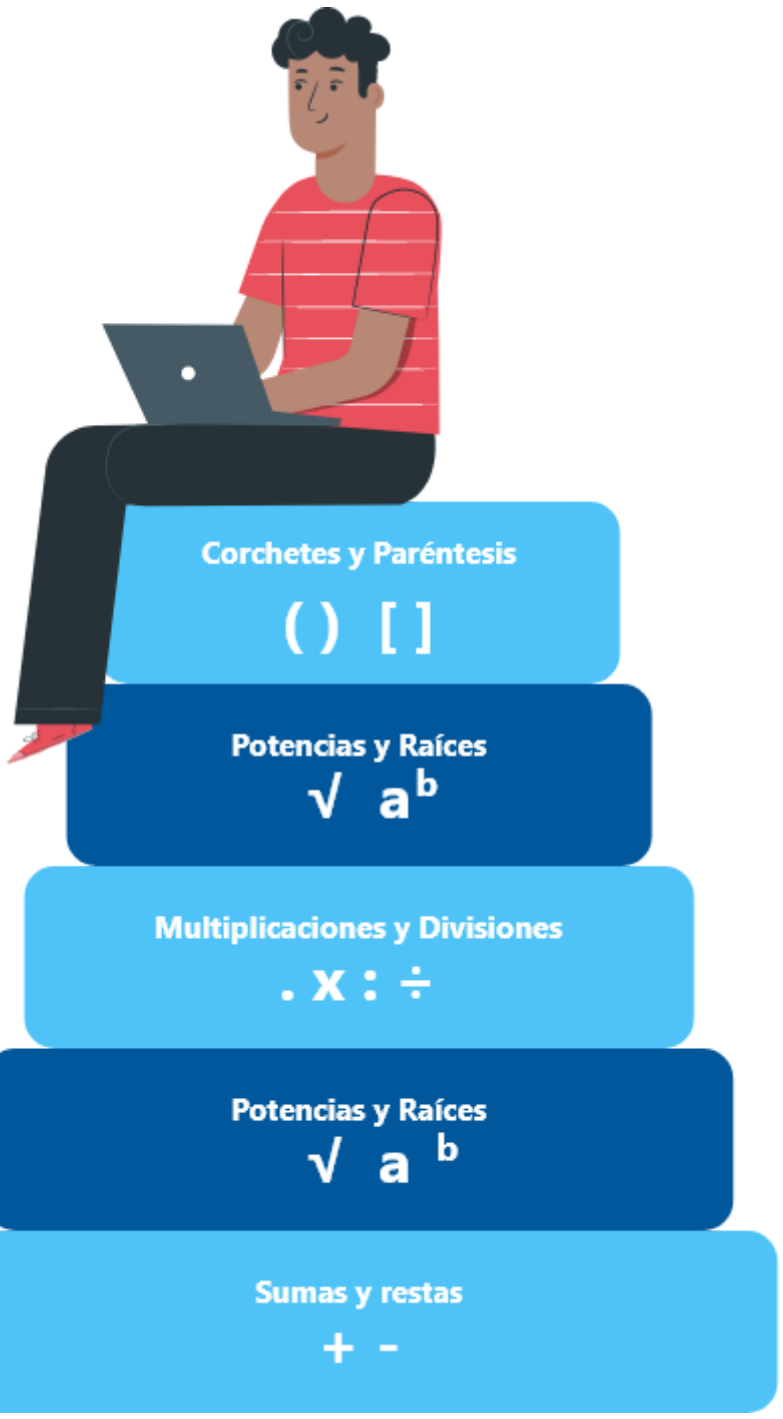
En este tema nos ocuparemos de las cuatro operaciones básicas: suma, resta, multiplicación y división en los diferentes conjuntos numéricos o los números reales. Así mismo también trabajaremos la potenciación y radicación y sus propiedades.

Pero debemos tener en cuenta una regla que para las operaciones combinadas en el conjunto de los números reales es necesario conocer la jerarquía de operaciones.

Pero qué es la jerarquía de operaciones, comencemos enunciando de qué trata:

2.1 Jerarquía de operaciones

La jerarquía de operaciones básicamente es una regla que nos determina cuáles operaciones se deben realizar primero en un determinado ejercicio que contenga varias operaciones como: sumas, restas, multiplicaciones, paréntesis, potencias y raíces. Para esto lo primero que debe realizarse es las operaciones que se encuentren agrupadas en paréntesis, llaves y corchetes, luego deben resolverse las potencias y raíces, posteriormente las divisiones y multiplicaciones en orden (De izquierda a derecha), y por último debemos resolver las sumas y restas.



Veamos un ejemplo:

$$3 \times (2 \times 4^3) / 4$$

Paso 1

Primero se resuelve lo que está dentro de paréntesis:

$$(2 \times 4^3)$$

Dentro del paréntesis se resuelve el exponente 4^3, que es igual a **64**

$$2 \times 64 = \mathbf{128}$$

Paso 2

Se resuelve la multiplicación ya que se encuentra primero (a la izquierda).

$$3 \times 128 = \mathbf{384}$$

Paso 3

Finalmente, se realiza esta división.

$$384 / 4 = \mathbf{96}$$

2.2 Operaciones en números enteros

Suma y resta de números enteros

A **Cuando los números enteros tienen el mismo signo**.

Se suman los valores y se deja el signo que tengan, si son positivos signo positivo y si son negativos signo negativo. Si no se pone nada delante del número se entiende que es +.

Ejemplos números enteros del mismo signo

$$(+5)+(+4)=+9$$

Es lo mismo que.

$$5+4=9$$

(– 5) + (– 4) = – 9. Es lo mismo que.

$$-5-4=-9$$

B **Cuando los números enteros tienen distinto signo**.

Se restan sus valores absolutos y se pone el signo del sumando de mayor valor absoluto. (Se restan y se deja el signo del más grande en valor absoluto).

Ejemplos números enteros de distinto signo

A. $(+20)+(-10)=20-10=+10$

20 – 10 = 10, el más grande es + 20, se pone + 10

B. $(-8)+(+3)=-8+3=-5$

8 – 3 = 5, el más grande es el – 8, se pone – 5

C. $(+11)+(-2)=11-2=+9$

11 – 2 = 9, el más grande es el 11, se pone + 9

Multiplicación y división de números enteros

Para estas operaciones es importante enunciar las reglas de los signos como se muestra en la siguiente imagen.



Reglas de signos

Multiplicar	Dividir
+ por + = +	+ entre + = +
– por – = +	– entre – = +
+ por – = –	+ entre – = –
– por + = –	– entre + = –

A **Para multiplicar dos números enteros**.

Se multiplican sus valores absolutos y se aplica la regla de los signos. Cuando van dos signos seguidos hay que separarlos utilizando paréntesis.

Ejemplo

A. (+ 8) * (+ 3) = + 24

B. (– 3) * (– 2) = + 6

B **Para dividir dos números enteros**.

Se divide el dividendo entre el divisor y se aplica la regla de los signos. Una división es exacta cuando el resto es 0.

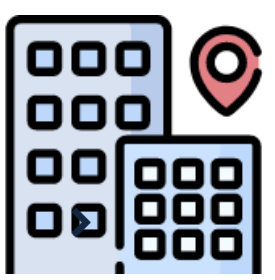
Ejemplo

A. (– 15) ÷ (15) = – 1

B. 8 ÷ 4 = + 2

Ahora realicemos un problema en el que podamos utilizar la información presentada.

En un depósito hay 1200 litros de leche. Por la parte superior un tubo vierte en el depósito 25 litros por minuto, y por la parte inferior por otro tubo salen 35 litros por minuto. **¿Cuántos litros de leche habrá en el depósito después de 20 minutos de funcionamiento?**



V

1000 litros de leche

F

850 Litros de leche

Respuesta

Paso 1

Lo primero que debemos realizar es pasar el problema a términos aritméticos para empezar a resolverlo y sacamos los datos cuantitativos.

Paso 2

1200 litros es la cantidad inicial de leche.

Paso 3

Luego debemos calcular la cantidad de leche que ingresa al depósito en los 20 minutos de funcionamiento: 25 litros que ingresan en un minuto lo multiplicamos por la cantidad de minutos que son veinte:

$$(25 \text{ litros} * 20 \text{ minutos})$$

Paso 4

Así mismo calculamos la cantidad de leche que sale del depósito en los mismo 20 minutos: 35 litros que salen por minuto lo multiplicamos por la cantidad de minutos que son veinte:

$$(35 \text{ litros} * 20 \text{ minutos})$$

Paso 5

Ahora calculamos la cantidad total de leche que queda en el depósito después de 20 minutos.

A la leche que hay en el depósito, le sumamos la leche que ingresa y le restamos la leche que sale y quedaría una expresión aritmética de esta forma:

$$1200 \text{ litros} + (25 \text{ litros} * 20 \text{ minutos}) - (35 \text{ litros} * 20 \text{ minutos})$$

Resolvemos los paréntesis y nos queda.

$$1200 \text{ litros} + 500 \text{ litros} - 700 \text{ litros} = 1000 \text{ litros}$$

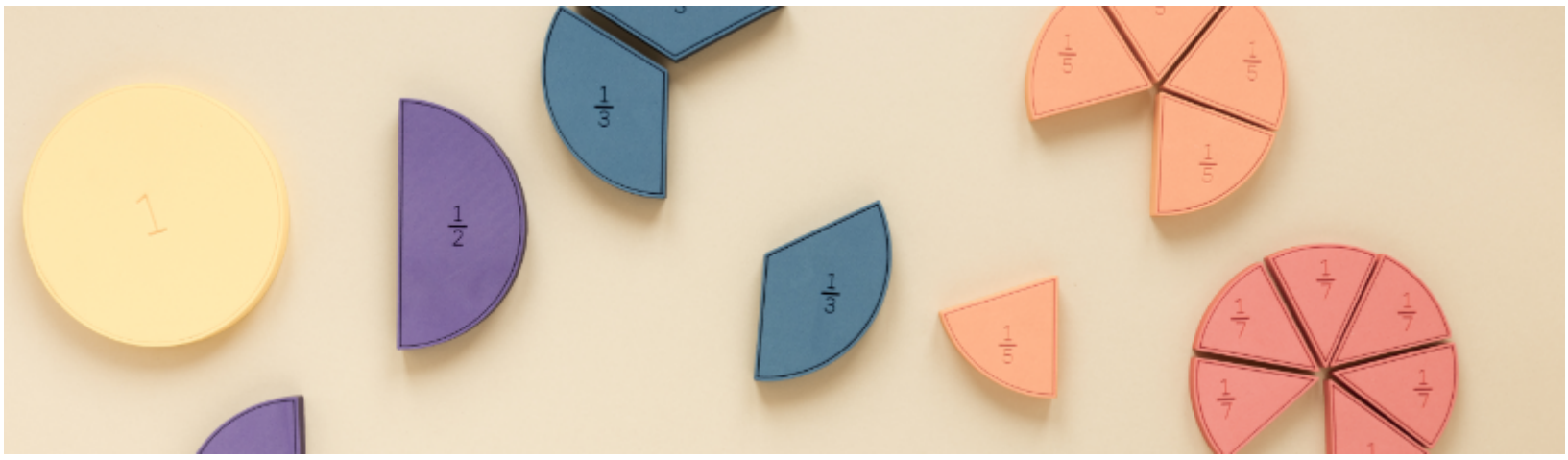
Luego realizamos las sumas y restas y nos da como resultado:

1000 litros quedan en el depósito

Respuesta Correcta V 1000 litros de leche

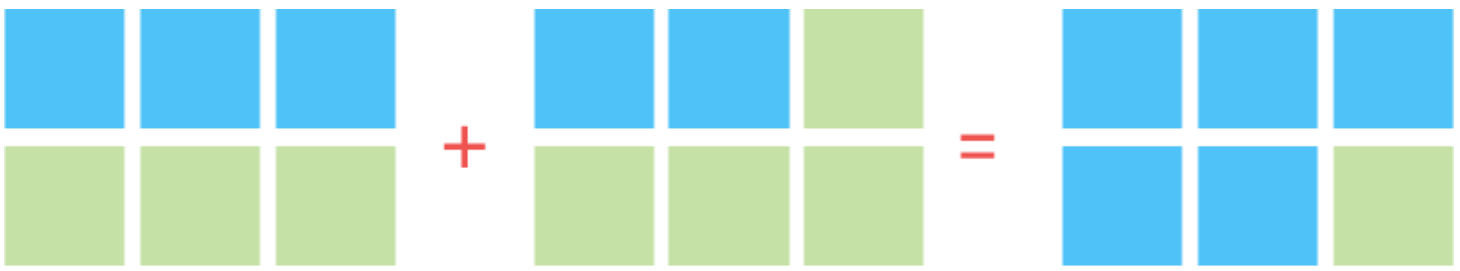
2.3 Operaciones en los números racionales

Recordemos que los números racionales también pueden ser nombrados como fracciones. Y que una fracción es dividir cualquier cantidad en cantidades iguales y tomar algunas de esas partes.



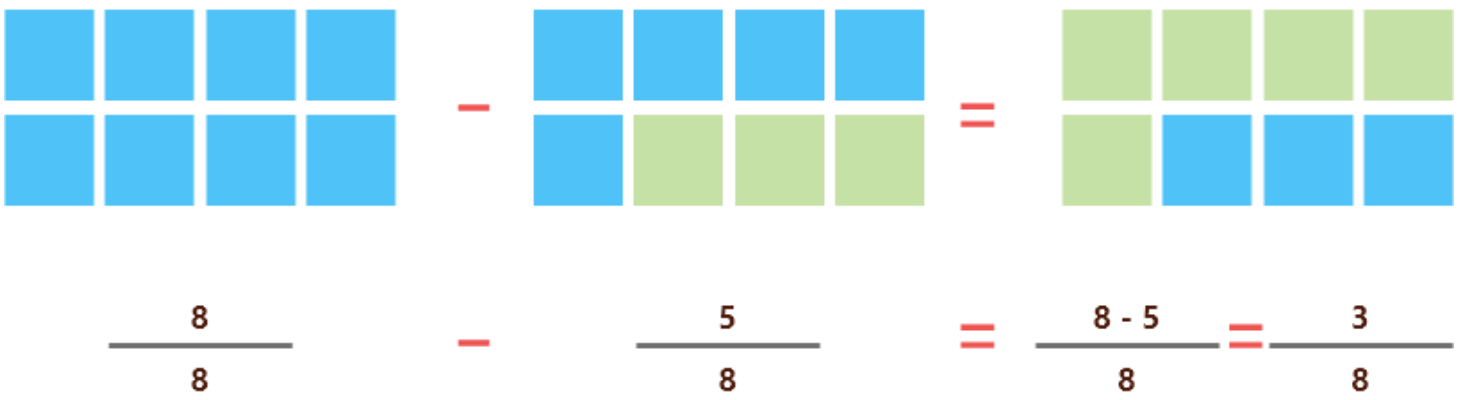
Empecemos a realizar operaciones de suma y resta de fracciones homogéneas. Son aquellas que tienen igual denominador.

Para sumar o restar números racionales homogéneos se coloca el mismo denominador y se suman o restan los numeradores así:



$$\frac{3}{6} + \frac{2}{6} = \frac{3+2}{6} = \frac{5}{6}$$

El mismo proceso se utiliza para la resta.



$$\frac{8}{8} - \frac{5}{8} = \frac{8-5}{8} = \frac{3}{8}$$

Ahora miremos el proceso que realizamos cuando los denominadores son distintos, lo que llamamos **operaciones con fracciones heterogéneas**.

Para adicionar o sustraer números racionales heterogéneos, se multiplican los denominadores entre sí y ese será el denominador de la respuesta, luego se multiplica el numerador de la primera fracción por el denominador de la segunda. Se coloca el mismo signo (de operación) y se procede a multiplicar el numerador de la segunda fracción por el denominador de la primera fracción. En cada caso se debe simplificar la respuesta si es posible.

Ejemplo

3 / 4 + 5 / 7

Paso 1

Se multiplican los denominadores.

$$4 * 7 = \mathbf{28}$$

Paso 2

Se multiplican el numerador de la primera fracción por el denominador de la segunda.

$$3 * 7 = \mathbf{21}$$

Paso 3

Se coloca el signo más. (+)

Paso 4

Se multiplica el numerador de la segunda fracción por el denominador de la primera.

$$4 * 5 = \mathbf{20}$$

Paso 5

Por último, sumamos los dos números que nos quedan en el en la parte de arriba.

$$21 + 20 = 41$$

Nos quedaría:

$$\frac{(21 + 20)}{28} = \frac{41}{28}$$

$$\frac{3}{4} + \frac{5}{7} = \frac{(7x3) + (4x5)}{4x7}$$

Multiplica los denominadores para obtener un denominador común

Esta multiplicación siempre va primero en la suma

$$= \frac{21 + 20}{28}$$

$$= \frac{41}{28}$$

Reduce o simplifica el resultado cuando sea posible

El mismo proceso se realiza para la resta de fracciones heterogéneas.

$$\frac{3}{4} - \frac{5}{7} = \frac{(7x3) - (4x5)}{4x7}$$

Multiplica los denominadores para obtener un denominador común

Esta multiplicación siempre va primero en la resta

$$= \frac{21 - 20}{28}$$

$$= \frac{1}{28}$$

Reduce o simplifica el resultado cuando sea posible

Suma de 3 fracciones

$$\frac{2}{3} + \frac{1}{2} + \frac{3}{4}$$

Busca el mínimo común múltiplo

2, 4, 6, 8, 10, **12**, 14
3, 6, 9, **12**, 15, 18, 21
4, 8, **12**, 16, 20, 24, 28

12

12 SERÁ EL COMÚN DENOMINADOR

4*2=8

$$\frac{2}{3} + \frac{1}{2} + \frac{3}{4} = \frac{8 + 6 + 9}{12} = \frac{23}{12} = 1\frac{11}{12}$$

12 / 3 = 4

Dividen el común denominador entre cada denominador y multiplica por el numerador que le corresponde

Fracción Impropia

Convertir a fracción mixta

Reduce si es posible

Ahora veamos en que se puede aplicar la suma y resta de fracciones en un caso cotidiano.

Un campesino siembra **2 / 7** de su finca con papa y **1 / 5** con tomate. Responde:



A. ¿Qué fracción de su finca tiene sembrada?

B. ¿Qué fracción de su finca está sin sembrar?

A 18/35

B 20/33

C 17/35

D 35/17

Para el primer interrogante debemos sumar las dos porciones de finca que están sembradas.

$$\frac{2}{7} + \frac{1}{5} = \frac{10 + 7}{35} = \frac{17}{35}$$

La fracción de finca que se encuentra sembrada con papa y tomate es **17 / 35**.

Respuesta Correcta C 17 / 35

Para dar respuesta al segundo interrogante procedemos de la siguiente manera.



La fracción que representa el total de la finca puede expresarse como **35 / 35** que es igual a **1**, ya que todo el terreno expresado en fracciones debe ser igual a 1 porque sería el terreno en general.

A 35/18

B 33/20

C 18/35

D 17/35

Ahora procedemos a realizar la resta así:

$$\frac{1}{1} - \frac{17}{35} = \frac{35 - 17}{35} = \frac{18}{35}$$

O bien también se puede realizar de la siguiente forma:

$$\frac{35}{35} - \frac{17}{35} = \frac{18}{35}$$

Recordemos que es una resta de fracciones homogéneas por lo tanto se pone en el resultado el mismo denominador y se operan los numeradores.

Respuesta Correcta C 18 / 35

2.4 Multiplicación de números racionales (fracciones)

El producto de dos números racionales es otro número racional y se realiza multiplicando los numeradores entre sí y denominadores entre sí.

Pero mejor veamos un ejemplo:

$$\frac{7}{2} \times \frac{15}{4} = \frac{7 \times 15}{2 \times 4} = \frac{105}{8}$$

$$\frac{7}{2} \times \frac{15}{4} = \frac{7 \times 15}{2 \times 4} = \frac{105}{8}$$

Para evidenciar en que se aplica la multiplicación de fracciones continuemos con la situación presentada anteriormente del campesino y sus cultivos.

Teniendo en cuenta que la finca del campesino cuenta con **1000 m^2** y la fracción de ese terreno sembrada es de **17 / 35**.

A. ¿Cuánto mide en metros cuadrados la parte del terreno que se encuentra sembrada?

B. Teniendo en cuenta que 2 / 7 se encuentra sembrada con papa, ¿Cuál es el área que se encuentra con papa?

Para encontrar la medida o el área del terreno sembrado multiplicamos el total de metros cuadrados (1000) por la fracción que se encuentre sembrada así:

Le ponemos el 1 de denominador al 1000 para que quede expresado como fracción.

$$\frac{1000}{1} \times \frac{17}{35} = \frac{17000}{35}$$

Simplificamos:

Recordemos que simplificar es dividir tanto el numerador como el denominador por el mismo número primo. En este caso el **17000** es divisible por **2** y por **5**, mientras que el **35** es divisible por **5** y por **7**. Así que dividimos ambos números por **5** y nos queda:

$$17000 \div 5 = 3400$$

$$35 \div 5 = 7$$

Por último, dividimos la fracción y nos da como resultados que la cantidad de terreno que se encuentra sembrado es de **485.71 m^2**

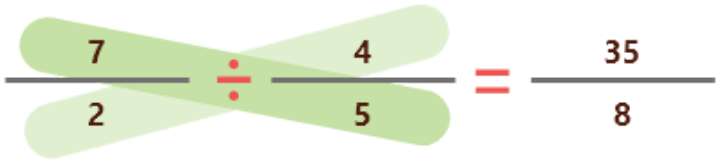
La fracción quedaría.

$$\frac{3400}{7} = 485.71m^2$$

2.5 División de fracciones

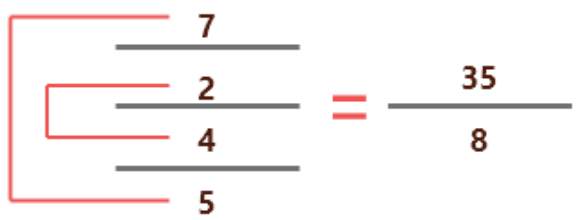
Para dividir dos números racionales se multiplica el numerador del primer número racional con el denominador del segundo número racional, y el numerador del segundo número con el denominador del primero. (Se multiplica en cruz) así:

$$\frac{7}{2} \div \frac{4}{5} = \frac{35}{8}$$



Para realizar la división también se puede realizar la ley de extremos y medios.

$$\frac{\frac{7}{2}}{\frac{4}{5}} = \frac{35}{8}$$





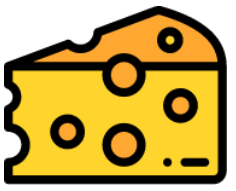
NUMERADOR POR DENOMINADOR CONTRARIO

DENOMINADOR POR NUMERADOR CONTRARIO

Reduce o convierte a fracción mixta cuando sea posible

Ahora miremos una aplicación cotidiana.

Andrea compró un queso que pesa **3 / 4** de kilo, si lo partió en porciones de **1 / 8** de kilo, **¿Cuántas porciones salieron de la totalidad del queso?**.



Lo que debemos hacer es dividir la cantidad de queso que hay entre 1/8 que es la porción que va a quedar.

$$\frac{\frac{3}{4}}{\frac{1}{8}} = \frac{24}{4} = 6$$

$$\frac{\frac{3}{4}}{\frac{1}{8}} = \frac{24}{4} = 6$$

La cantidad de porciones de **1 / 8** que salen es de **6**.



¿Sabía qué?

La pintura denominada el hombre de Vitruvio busca representar por medio de la simetría arquitectónica cómo sería el hombre perfecto (físicamente).

Algunas de las conclusiones a las que llegó matemáticamente el creador Marco Vitruvio fueron las proporciones presentes en el cuerpo humano:

- Desde el inicio de la barbilla hasta la parte más arriba de la frente mide **1 / 10** del total de la altura.
- La cabeza, desde la coronilla hasta el final de la barbilla mide **1 / 8** en relación con la altura de todo el cuerpo.
- Iniciando desde el cuero cabelludo hasta el final del esternón equivale a **1 / 6** del total de la altura del cuerpo.
- Desde la mitad del pecho hasta la coronilla equivale a **1 / 4** del total del cuerpo.
- La longitud de la frente mide **1 / 5** en relación con todo el rostro.
- La longitud del pie equivale al **1 / 6** del total del cuerpo.



2.6 Potencias y raíces

Potenciación

La potenciación es la multiplicación de un número (n) veces, el mismo número entero o racional, en el la base es el número racional que multiplicaremos y n (Denominado exponente) es el número de veces que multiplicamos la base.

$$a^n = a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot n \text{ veces}$$

Para ello podemos comprender algunas de las siguientes propiedades de las potencias.

Propiedad	*Exposición*	*Ejemplo*
Potencia de base cero.	Cualquier potencia de base 0 es igual a 0. $0^m = 0$	$0^4 = 0$
Potencia de exponente cero.	Cualquier potencia de exponente 0 es igual a 1. $X^0 = 1$	$5^0 = 1$
Potencia de exponente 1.	Cualquier potencia de exponente 1 es el mismo número. $X^1 = X$	$7^1 = 7$
Producto de potencias de la misma base.	El producto de potencias de la misma base es la misma base y el exponente la suma de los exponentes. $X^m + X^n = X^{m+n}$	$2^4 * 2^6 = 2^{4+6} = 2^{10}$
Cociente de potencias de la misma base.	El producto de potencias de la misma base es la misma base y el exponente de la suma de los exponentes. $X^m / X^n = X^{m-n}$	$3^5 / 3^2 = 3^{5-2} = 3^3$
Potencia de una potencia.	La potencia de una potencia es la misma base y el exponente el producto de los exponentes. $(X^m)^n = X^{m*n}$	$(6^2)^4 = 6^{2*4} = 6^8$
Producto de potencias con el mismo exponente.	El producto de potencias con el mismo exponente es una potencia con el mismo exponente y como base el producto de las bases. $X^m * Y^m = (X * Y)^m$	$2^3 * 4^3 = (2 * 4)^3$
Cociente de potencias con el mismo exponente.	El cociente de potencias es una potencia con el mismo exponente y con base el cociente de las bases. $X^m / Y^m = (X / Y)^m$	$6^3 / 2^3 = (6 / 2)^3 = 3^3$
Potencia de exponente negativo.	La potencia de exponente negativo es igual al inverso de la potencia, con exponente positivo. $X^{-m} = 1 / X^m$	$4^{-2} / 2 = 1 / 4^2$
Potencia de exponente racional.	La potencia de exponente racional es igual a una raíz, donde el denominador es el índice de la raíz y el numerador el exponente del radicando. $X^{m/n} = \sqrt[n]{X^m}$	$7^{4/3} = \sqrt[3]{7^4}$

Radicación



La radicación es conocida como la operación contraria a la potenciación en donde se conoce el índice de la raíz y el radicando de este modo se puede encontrar un número que multiplicado el número de veces que enuncie el índice nos de como resultado el radicando.

Propiedades de la potencia

Operación	*Ejemplo*
Producto: $\sqrt[n]{a} * \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a * b}$	$\sqrt[3]{4} * \sqrt[3]{6} = \sqrt[3]{24}$
Cociente: $\sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a / b}$	$\sqrt[3]{4} : \sqrt[3]{6} = \sqrt[3]{4 / 6}$
Potencia: $(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$	$(\sqrt[5]{4})^6 = \sqrt[5]{4^6}$
Simplificar: $(\sqrt[n]{a^n}) = a$	$(\sqrt[3]{2^3}) = 2$
Raíz de raíz: $(\sqrt[p]{\sqrt[n]{a}}) = \sqrt[n * p]{a}$	$(\sqrt[4]{\sqrt[2]{3}}) = \sqrt[8]{3}$
Introducir: $(a \sqrt[n]{a^n}) = \sqrt[n]{a^n * a} = \sqrt[n]{a^{n+1}}$	$(4 \sqrt[3]{4}) = \sqrt[3]{4^3 * 4} = \sqrt[3]{4^4}$

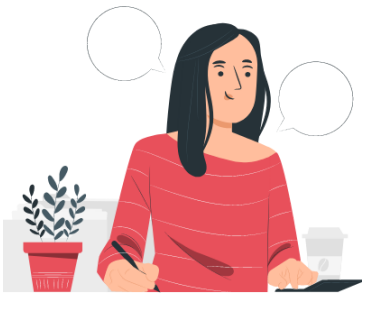
2.7 Operaciones en los números irracionales



Las operaciones con números irracionales tienen que ver con algunas reglas o procedimientos que se realizan para reducir una expresión aritmética que contenga números irracionales y no tener que acudir a una calculadora.

Suma y resta

Para la suma de y resta de expresiones con números irracionales debemos identificar cuáles son los términos semejantes bien sea el mismo número irracional como pi, o que la raíz tenga el mismo radicando (Número dentro de la raíz). Si se tienen términos semejantes simplemente se pueden juntar las cantidades y poner el mismo término semejante como pi + 2 pi = 3pi. Pero si por el contrario no son términos semejantes la expresión se deja expresada. Miremos algunos ejemplos con operaciones en los números irracionales.



Ejemplo

$$\sqrt{a} + 2\sqrt{a} + 3\sqrt{a} - 4\sqrt{a} = 2\sqrt{a}$$

Como todas las raíces son semejantes se operan los números que las acompañan y se pone la misma raíz y radicando.

$$\sqrt{2} + 2\sqrt{3} + 3\sqrt{2} - 4\sqrt{3} + 3\sqrt{2} = ¿?$$

En este caso existen raíces semejantes de 2 y 3, entonces operamos las raíces semejantes de cada una así:

$$\sqrt{2} + 3\sqrt{2} + 3\sqrt{2} = 7\sqrt{2}$$
$$2\sqrt{3} - 4\sqrt{3} = -2\sqrt{3}$$

Por lo tanto, el resultado queda expresado de la siguiente forma ya que son números irracionales y para la suma y la resta no aplica la propiedad distributiva.

$$7\sqrt{2} - 2\sqrt{3}$$

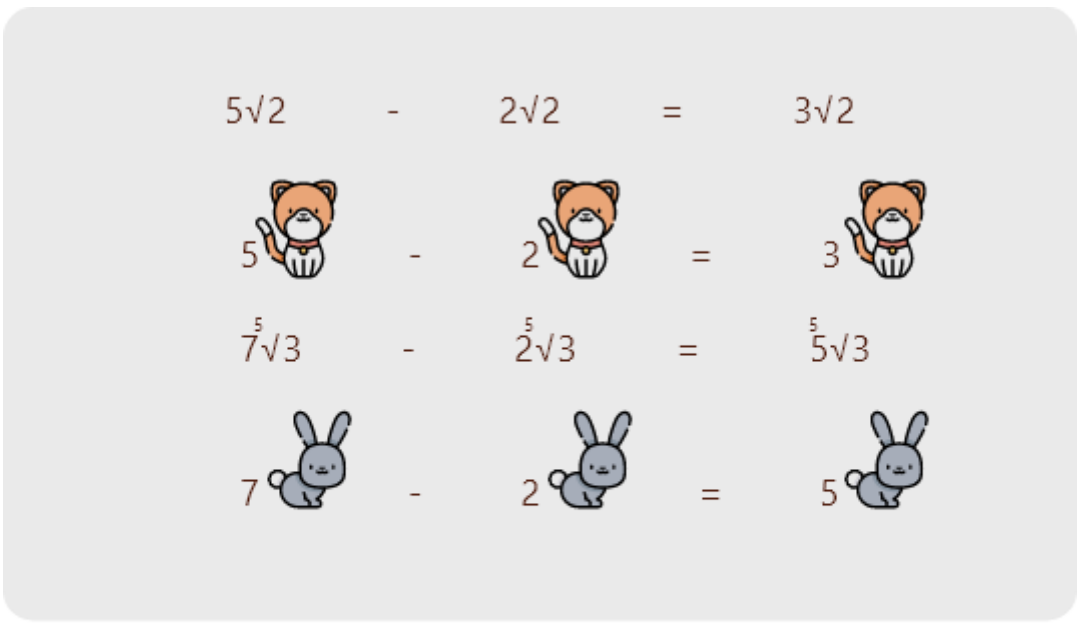
Nota

Para efectuar sumas y/o restas de radicales tienen que ser siempre semejantes.

Por lo general cuando son radicales de números muy grandes se pueden descomponer en factores primos.

$$\sqrt{28} = \sqrt{2^2\,7^1} = 2\sqrt{7}$$
$$\sqrt{63} = \sqrt{3^3\,7^1} = 3\sqrt{7}$$

Suma y resta de radicales



$$5\sqrt{2} + 3\sqrt[3]{3} = 5\sqrt{2} + \sqrt[3]{3}$$



Multiplicación

En el producto y la división si se da la propiedad distributiva. La raíz de un producto es igual al producto de las raíces y viceversa. Lo mismo para el cociente.

Ejemplo

$$1\sqrt[3]{2} \times 3\sqrt[3]{2} \times 2\sqrt[3]{2} = ¿?$$

En este caso podemos multiplicar todos números enteros que acompañen las raíces (1, 3 y 2) y luego como las raíces tienen el mismo índice (cúbico) podemos multiplicar todos los radicandos entre sí y dejarlos dentro de la raíz así:

$$(1 \times 3 \times 2) \times (1\sqrt[3]{2} \times 3\sqrt[3]{2} \times 2\sqrt[3]{2}) = (6) \times (\sqrt[3]{8}) =$$

Por lo tanto, el resultado es igual a $6\ \sqrt[3]{8}$.

Como la $\sqrt[3]{8} = 2$ porque es un número que multiplicado 3 veces da como resultado 8.

$$2 \times 2 \times 2 = 8$$

Entonces el resultado quedaría.

$$6 \times 2 = 12$$

División

Por último, enunciamos como sería la división de números irracionales.

$$\frac{\sqrt{24}}{\sqrt{6}}$$

En este caso como 24 no tiene raíz exacta y 6 tampoco (Son números irracionales) podemos aplicar la propiedad distributiva con respecto a la división de esta forma.

$$\sqrt{\frac{24}{6}} = \sqrt{4} = 2$$

El resultado queda igual a 2 porque a cuatro si se le puede sacar raíz cuadrada exacta número racional.